Ejercicios de Cálculo Multivariable: Regiones en el Primer Octante

Prof. **Salomón Ching** - facebook.com/ProfSalomon

25 de abril de 2025

¡Hola a todos los apasionados del Cálculo! En esta ocasión, les comparto la resolución detallada de algunos ejercicios típicos de Cálculo Multivariable (Cálculo 2 o 3, según la universidad) que me encargó un estudiante de ingeniería. Estos problemas se centran en describir regiones sólidas en el primer octante, limitadas por diversas superficies. ¡Espero les sea de gran utilidad para sus estudios!

Ejercicio 5f

Problema: Represente gráficamente la región E del primer octante limitada por las superficies dadas, luego descríbala de forma ordenada:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 8, \quad S_2 : y - x = 0 \quad (y = x), \quad S_3 : y = 2$$

Resolución

1. Identificación de Superficies y Visualización Inicial

Primero, identificamos cada superficie:

- S_1: Esfera centrada en el origen (0,0,0) con radio $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Figura 1
- S_2: Plano $y = x$, que pasa por el eje z e inclinado a 45° respecto a los planos xz e yz.
- S_3: Plano $y = 2$, paralelo al plano xz.
- **Restricción adicional:** Primer octante $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

Para comprender mejor cómo estas superficies interactúan en el espacio $\mathbb{R}^3$, visualicémoslas antes y después de aplicar la restricción del primer octante. Figura 1

2. Análisis y Descripción Ordenada

Para describir la región sólida E de forma ordenada, primero analizamos su "base" o proyección sobre el plano xy. Esta base es una región plana R limitada por las trazas de las superficies en el plano xy y las restricciones del primer octante $(x \geq 0, y \geq 0)$. En este caso, las líneas que delimitan R son:

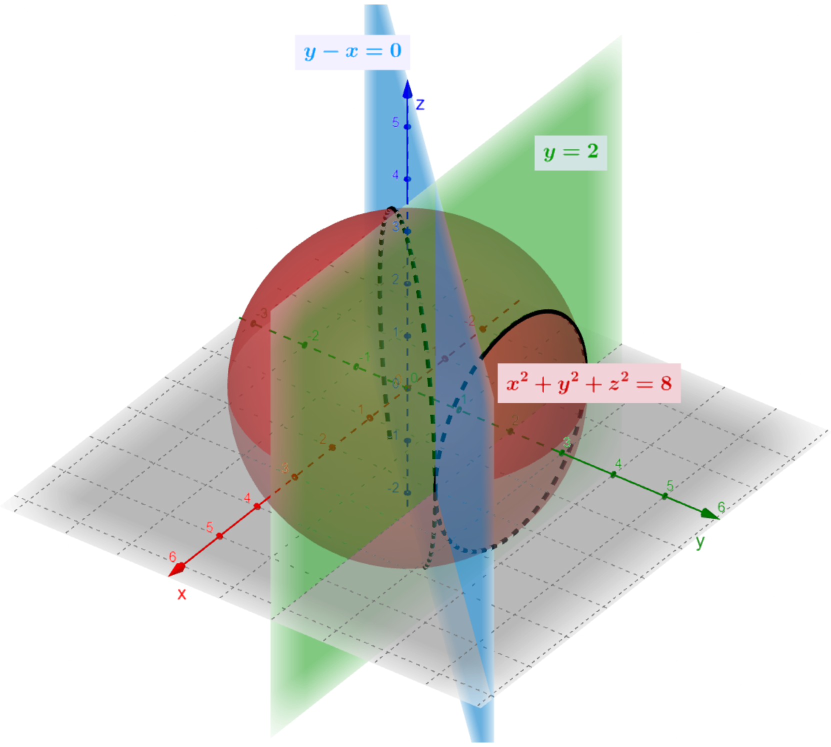

Figura 1: Visualización de las superficies completas S_1 (esfera), S_2 (plano $y = x$) y S_3 (plano $y = 2$) antes de la restricción al primer octante. **Explora en 3D:** GeoGebra Link

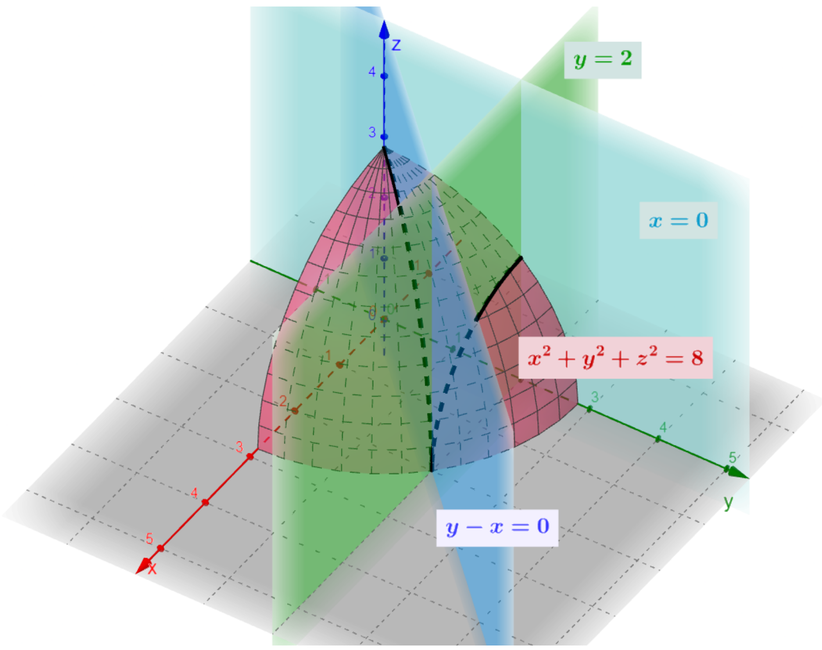

Figura 2: Las mismas superficies S_1, S_2 y S_3, pero ahora restringidas al primer octante ($x, y, z \geq 0$). La región sólida E de interés es la porción de la esfera delimitada por los planos y los ejes coordenados en este octante. **Explora en 3D:** GeoGebra Link

- El eje y (la línea $x = 0$).
- La línea $y = x$ (traza del plano S_2).
- La línea horizontal $y = 2$ (traza del plano S_3).

Esta región triangular R en el plano xy puede describirse estableciendo los límites para x e y de dos maneras principales, como se visualiza en la figura 3:

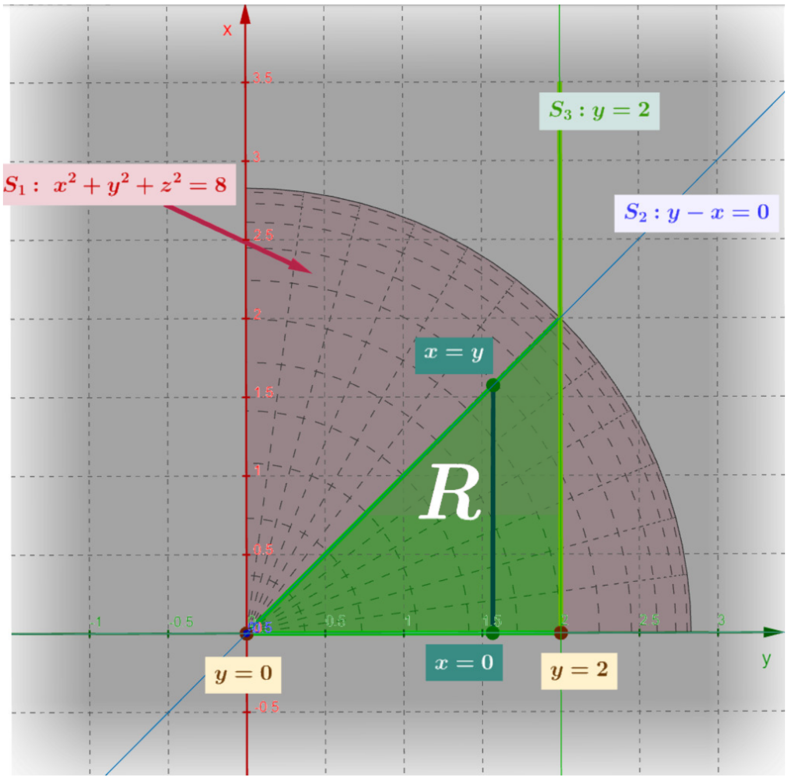

Figura 3: Región R en el plano xy. Se ilustra cómo definir los límites considerando primero la variación de y. Si y se mueve entre 0 y 2 (sus límites constantes), entonces para cada valor de y, x varía desde la recta $x = 0$ (eje y) hasta la recta $x = y$ (etiquetas verdes). Esto lleva a la descripción: $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq x \leq y$. **Explora en 3D:** GeoGebra Link

Podemos ver que para definir (o describir) una región sólida E de forma estándar, a menudo se prefiere expresar una variable entre constantes y las siguientes entre funciones de las variables anteriores. La descripción de la figura 3 ($0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y$) sigue este patrón. Por lo tanto, adoptamos esta descripción para la base en el plano xy.

Con la base definida, ahora consideramos la variación en z. La región E está limitada inferiormente por el plano xy ($z = 0$, por estar en el primer octante) y superiormente por la esfera S_1 ($x^2 + y^2 + z^2 = 8$).

Los límites para la región E son:

- y: Varía entre sus límites constantes en la base R. $\implies 0 \leq y \leq 2$.
- x: Para un y fijo en ese intervalo, x varía según los límites de la base R. $\implies 0 \leq x \leq y$.

- z: Para un (x, y) fijo en la base R, z varía desde el "piso"hasta el "techo". El piso es $z = 0$ (primer octante). El techo es la esfera S_1. Despejando z de S_1 (y tomando la raíz positiva por estar en el primer octante): $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$. $\implies$ $0 \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}$.

Por lo tanto, la descripción ordenada de la región E es:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}\right\}$$

3. Gráfico

De la figura 2 podemos deducir que la región sólida E, que nos piden graficar, es un cuarto de esfera (con su interior) en el primer octante, 'rebanada' por dos planos verticales tal como se observa en la figura 4. Nótese la base en forma de triángulo en el plano xy.

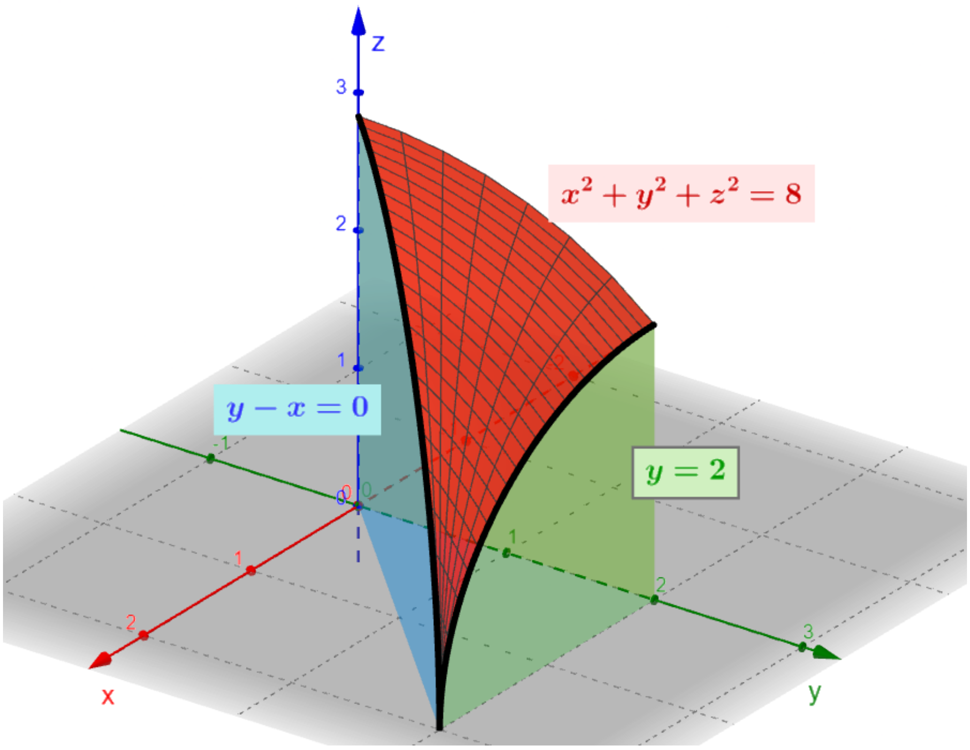

Figura 4: Región E para el Ejercicio 5f.
Explora en 3D: GeoGebra Link

Ejercicio 5g

Problema: Represente gráficamente la región E del primer octante limitada por las superficies dadas, luego descríbala de forma ordenada:

$$S_1 : z = 4 - x^2 - y^2, \quad S_2 : x^2 + y^2 = 2y, \quad S_3 : x = 0$$

Resolución

1. Identificación de Superficies

Primero, visualicemos las superficies completas S_1, S_2, S_3 para entender su interacción general en $\mathbf{R}^3$, como se muestra en la figura 5.

- S_1: Paraboloide que abre hacia abajo, vértice en (0,0,4).
- S_2: Cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Eje paralelo al eje z, pasando por (0,1,0), radio 1.
- S_3: Plano yz $(x = 0)$.
- **Restricción adicional:** Primer octante $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

Sus gráficas completas en $\mathbf{R}^3$ mostradas en la figura 5 son un paso intermedio para elegir la región R, que es la proyección de E sobre alguno de los planos: xy, yz, xz. Dicha región R entonces, es el punto de partida para la descripción ordenada de las variables (x, y, z).

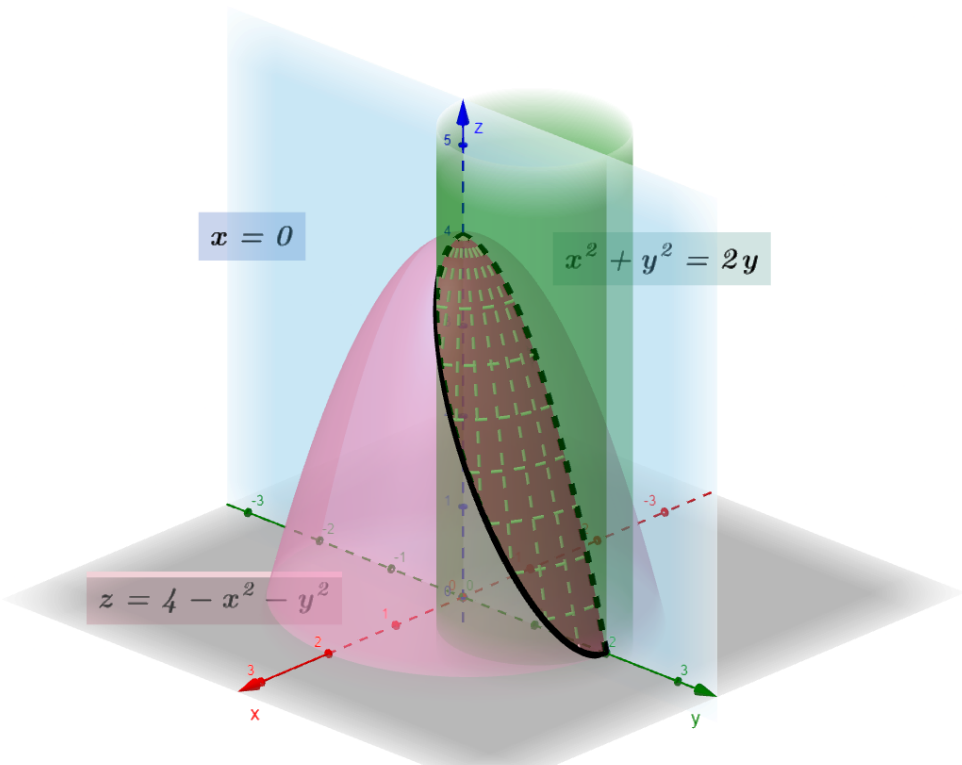

Figura 5: Visualización de las superficies completas S_1 (paraboloide), S_2 (cilindro) y S_3 (plano x=0) antes de aplicar la restricción del primer octante para el ejercicio 5g.
Explora en 3D: GeoGebra Link

2. Análisis y Descripción Ordenada

Proyectamos la región sobre el plano xy (ver la figura 6). La base está definida por la porción del círculo $x^2 + (y-1)^2 = 1$ en el primer cuadrante. Despejando x de S_2 (para $x \geq 0$): $x = \sqrt{2y - y^2}$. Los límites para la región E son:

- y: La base $x^2 + (y-1)^2 = 1$ se extiende desde $y = 0$ hasta $y = 2$. $\implies 0 \leq y \leq 2$.
- x: Para un y fijo, x varía entre $x = 0$ (plano S_3) y el cilindro S_2. $\implies 0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2}$.
- z: Varía entre $z = 0$ (primer octante) y el paraboloide S_1. $\implies 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

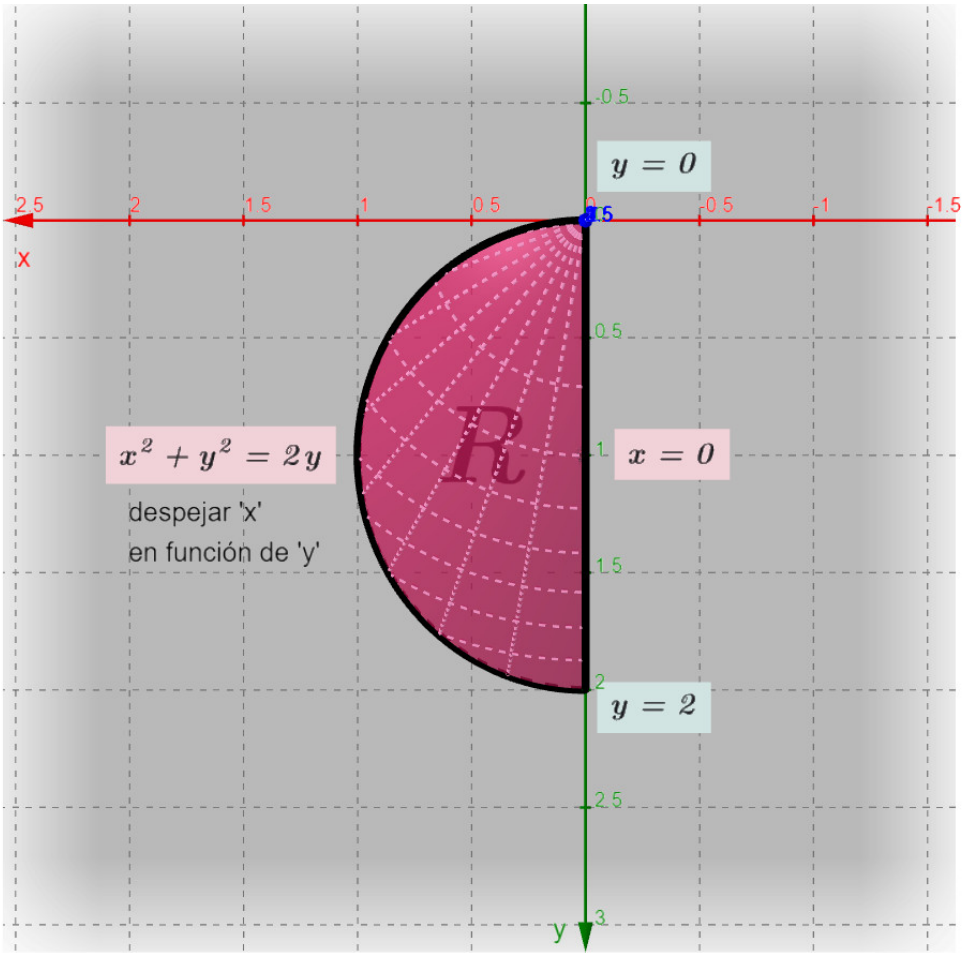

Figura 6: Proyección R de la región E sobre el plano xy para el Ejercicio 5g. La variable y está limitada por las constantes $y = 0$ (etiqueta azul) y $y = 2$ (etiqueta azul). Para cada valor de y en este intervalo, la variable x varía entre la función $x = 0$ (eje y, etiqueta rosa) y la curva $x = \sqrt{2y - y^2}$ (obtenida al despejar el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, etiqueta rosa).
Explora en 3D: GeoGebra Link

Por lo tanto, la descripción ordenada de la región E es:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2},\ 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \right\}$$

3. Gráfico

El gráfico de la región E resultante es lo visto en la figura 5 pero recortada al primer octante; puede apreciarse que es medio cilindro (en verde) 'rebanado' por la superficie del paraboloide (en rojo), digamos como una tapa parabólica, aunque su base es medio círculo en el plano xy.

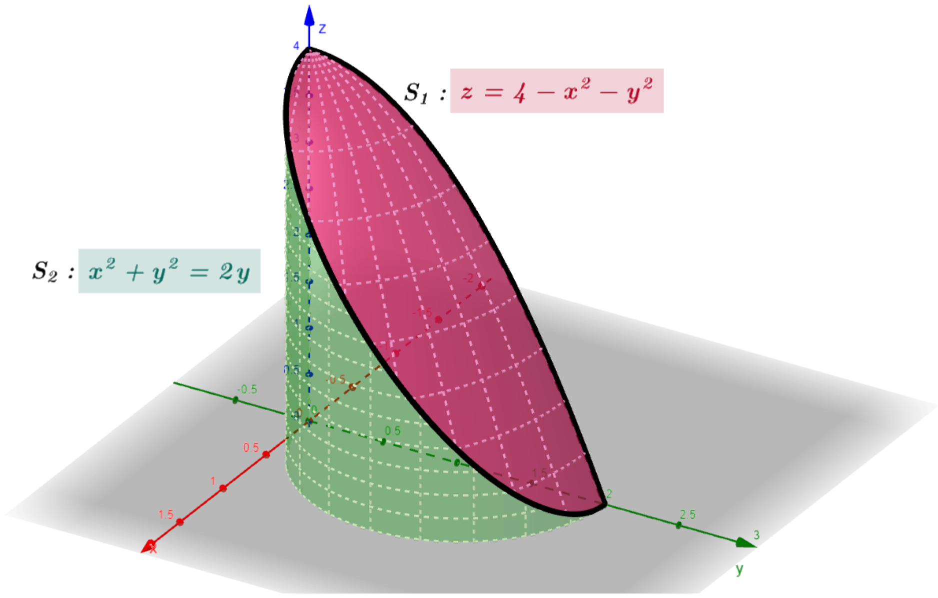

Figura 7: Región E para el Ejercicio 5g.
Explora en 3D: GeoGebra Link

Ejercicio 5h

Problema: Represente gráficamente la región E del primer octante limitada por las superficies dadas, luego descríbala de forma ordenada:

$$S_1 : x + z = 2, \quad S_2 : x = 4 - 2\sqrt{y^2 + z^2} \quad (\text{o } (x-4)^2 = 4(y^2 + z^2)), \quad S_3 : x = 0$$

Resolución

1. Identificación de Superficies

- S_1: Plano $x + z = 2$.
- S_2: Cono con vértice en (4,0,0), eje a lo largo del eje x, abriendo hacia x negativo.
- S_3: Plano yz $(x = 0)$.
- **Restricción adicional:** Primer octante $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

Todo esto lo visualizamos en la figura 8 con el fin de encontrar la región R de proyección sobre los planos coordenados.

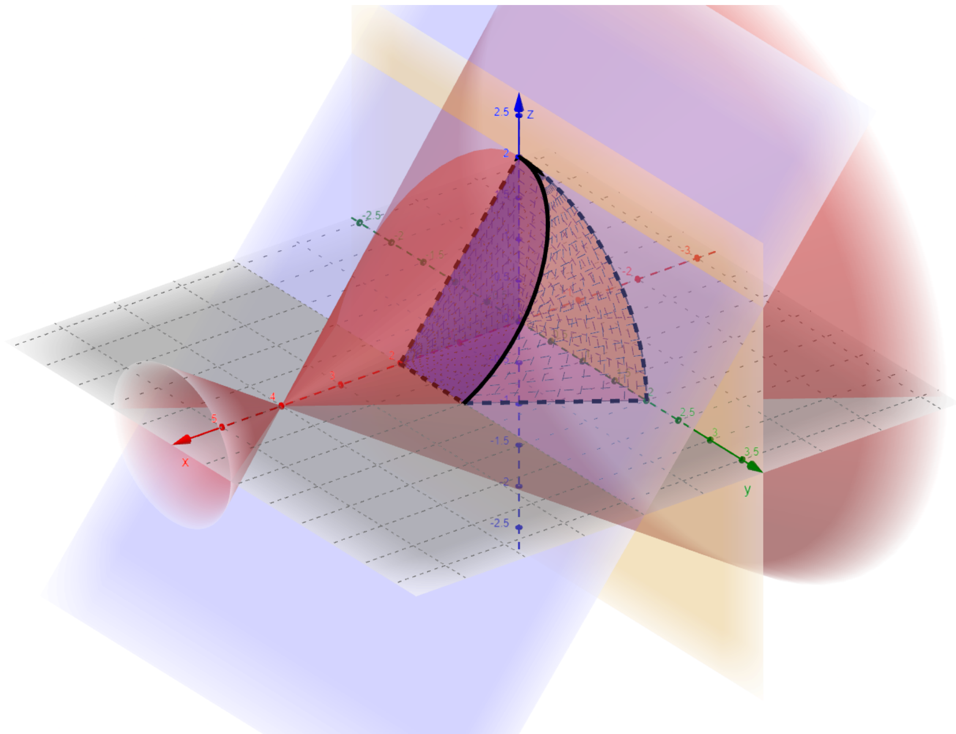

Figura 8: Visualización de las superficies completas S_1 (Plano x+z=2), S_2 (Cono) y S_3 (plano x=0) antes de aplicar la restricción del primer octante para el ejercicio 5h. **Explora en 3D:** GeoGebra Link

2. Análisis y Descripción Ordenada (Proyección xz)

Después de analizar diferentes proyecciones y verificar la consistencia (¡gracias a la discusión y el poder del contraejemplo!), la descripción más adecuada y rigurosa se obtiene proyectando sobre el plano xz tal como se aprecia en la figura 9.

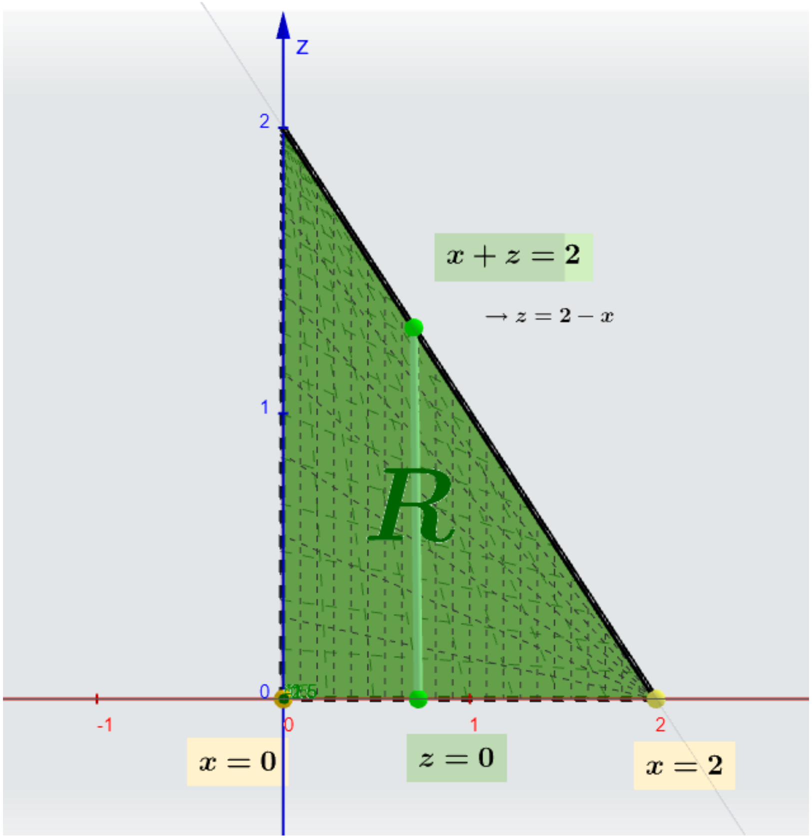

Figura 9: Proyección R de la región E sobre el plano xz para el Ejercicio 5h. La variable x está limitada por las constantes $x = 0$ y $x = 2$ (etiqueta amarillas). Para cada valor de x en este intervalo, la variable z varía entre $z = 0$ (eje x) y la recta $z = 2 - x$ (etiquetas verdes) (obtenida al despejar el plano $x + z = 2$).
Explora en 3D: GeoGebra Link

La base de E en el plano xz está limitada por $x = 0$, $z = 0$ y el plano S_1 ($z = 2 - x$). Los límites para la región E son:

- x: Varía desde $x = 0$ hasta la intersección de $z = 2 - x$ con $z = 0$, que es $x = 2$. $\implies 0 \le x \le 2$.
- z: Para un x fijo, z varía entre $z = 0$ y el plano S_1. $\implies 0 \le z \le 2 - x$.
- y: Varía entre $y = 0$ (primer octante) y el cono S_2. Despejando y de S_2 tendremos: $y = \frac{1}{2}\sqrt{(x-4)^2 - 4z^2}$. $\implies 0 \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{(x-4)^2 - 4z^2}$.

Todo esto puede entenderse mejor con el gráfico interactivo 'Explora en 3D' cuyo link se ve en la descripción de la figura 9 en el que se ve la región R proyectada sobre el plano xz, y así apreciar desde los demás ángulos la superficie cónica.

Por lo tanto, la descripción ordenada de la región E es:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 2 - x,\ 0 \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{(x-4)^2 - 4z^2} \right\}$$

3. Gráfico

La región E resultante es una sección de cono en el primer octante (junto con su interior). Puede apreciarse por qué no era viable tomar las proyecciones xy o yz, debido a que se formaban más de una curva o función en el plano proyectado. Recomiendo usar el link de exploración Explora en GeoGebra, ya que al ser interactivo, el usuario puede clicar sobre la proyección y girar el ángulo de perspectiva gradualmente y así ver cómo es que E se proyecta en dichos planos $z = 0$ y $x = 0$. El gráfico de la figura 9 complementa la idea al verlo desde el plano xz.

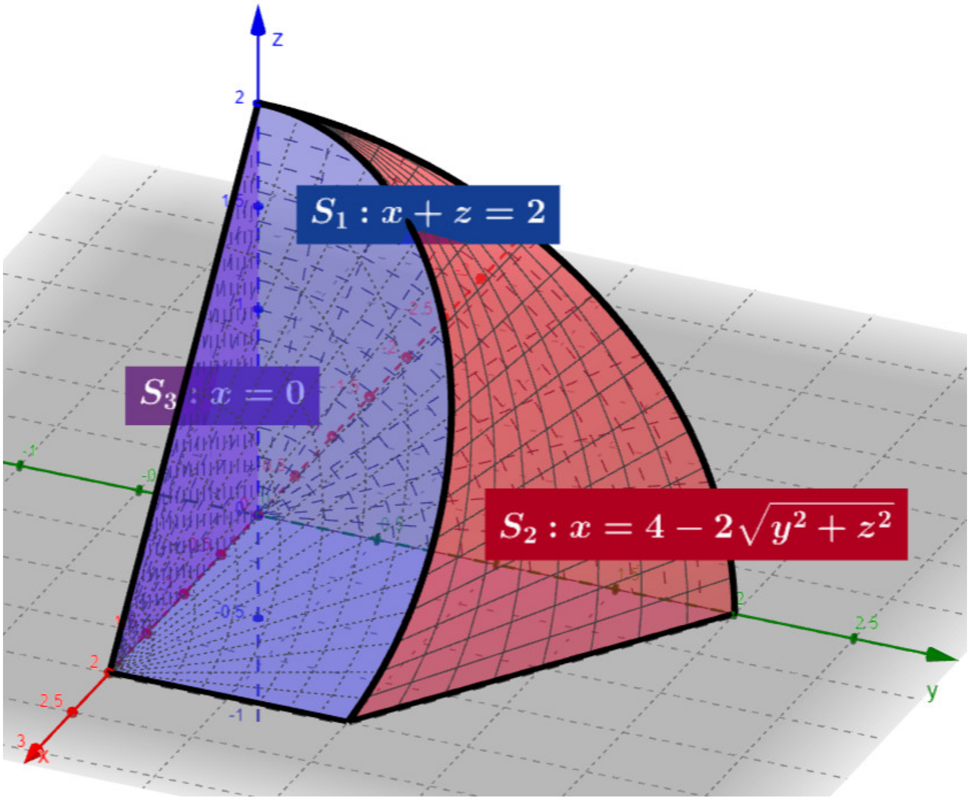

Figura 10: La región sólida E final para el ejercicio 5h, está limitada en el primer octante por las superficies S_1 (plano, en azul translúcido), S_2 (cono, en rojo), S_3 (plano, en violeta), y los planos xy, xz.
Explora en 3D: GeoGebra Link

Conclusiones y Estrategias Clave

Resolver ejercicios de descripción de regiones en $\mathbb{R}^3$, especialmente en el primer octante, es fundamental para plantear correctamente integrales triples. A través de los ejemplos desarrollados, hemos seguido una metodología consistente:

1. **Identificar y Visualizar:** Reconocer el tipo de cada superficie (esfera, plano, cono, paraboloide, cilindro) y visualizar (mentalmente o con herramientas como GeoGebra) cómo interactúan en el espacio, considerando la restricción al primer octante. Esta visualización inicial es crucial.

2. **Elegir la Proyección Adecuada:** Determinar sobre qué plano coordenado (xy, yz o xz) proyectar la región sólida E para obtener una región plana R cuya descripción sea lo más sencilla posible. La clave es buscar la proyección donde los límites de las dos primeras variables sean más fáciles de definir (idealmente, una variable entre constantes y la segunda entre funciones de la primera).

3. **Describir la Base R:** Establecer los límites de las dos variables correspondientes al plano de proyección, basándose en las trazas de las superficies sobre ese plano y las restricciones del primer octante.

4. **Establecer Límites de la Tercera Variable:** Determinar los límites para la variable restante. Esta variable generalmente se moverá entre la superficie **“inferior”** (a menudo el plano coordenado, $z = 0$, $y = 0$ o $x = 0$ en el primer octante) y la superficie **"superior"** que “tapa” la región E. Esto usualmente requiere despejar esta tercera variable de la ecuación de la superficie correspondiente.

Una Observación Útil (Patrón Frecuente):

En muchos problemas introductorios como los que hemos visto, a menudo se presenta un patrón que puede servir como pista:

- Si **dos de las tres superficies** limitantes son **“cilíndricas”** respecto a un mismo eje (es decir, sus ecuaciones **carecen de la misma variable**, por ejemplo, $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$, que no dependen de z), esto sugiere fuertemente que la proyección más conveniente será sobre el plano de las otras dos variables (en este caso, el plano xy).
- Las trazas de estas dos superficies en el plano xy definirán los límites de la región base R para x e y.
- La **tercera superficie** (cuya ecuación sí depende de la variable ausente, z en el ejemplo) actuará típicamente como el **“techo”** o **“piso”** de la región E. Los límites para z se encontrarán despejando z de la ecuación de esta tercera superficie (limitado inferiormente por $z = 0$ en el primer octante).

Importante: Si bien este patrón es útil, **no es una regla universal**. La visualización y el análisis cuidadoso de cada caso particular siguen siendo esenciales para elegir la mejor estrategia. El objetivo final es siempre simplificar la descripción de la región E para facilitar el cálculo de integrales posteriores.

¡Espero que estas resoluciones les sirvan de guía! Recuerden siempre visualizar las superficies y elegir la proyección que simplifique más los límites. ¡Cualquier duda, déjenla en los comentarios! ¡Éxitos en sus estudios!

Apéndice: Visualizaciones Interactivas en GeoGebra

Todas las soluciones presentadas han sido cuidadosamente verificadas utilizando GeoGebra 3D. Para aquellos que deseen explorar estas regiones de forma interactiva y desde diferentes ángulos, aquí les dejo los enlaces a las construcciones:

- **Problema 5f:** https://www.geogebra.org/classic/dhgjkufw
- **Problema 5g:** https://www.geogebra.org/classic/sd3jnhw2
- **Problema 5h:** https://www.geogebra.org/classic/r5bttrfe

Estas visualizaciones permiten no solo confirmar la forma del sólido, sino también comprender mejor cómo las diferentes superficies interactúan para delimitar la región E descrita en cada ejercicio. ¡Una gran herramienta de estudio!