

ARITMÉTICA

Divisibilidad y Múltiplos

Clase de Tutoría Personalizada

Respuesta a la ficha de ejercicios del Colegio Peruano Español (Chiclayo)

Hola a toda la comunidad web. El día de hoy tuve el gusto de ayudar a un alumno de quinto de secundaria del **Colegio Peruano Español de Chiclayo, Perú**, a resolver su ficha de ejercicios de Aritmética. Los problemas se centraban en el tema de Divisibilidad. Dada la calidad y el enfoque de nivel preuniversitario de estos ejercicios, he decidido transcribir y compartir la **resolución directa** que desarrollé en mis tutorías personalizadas. Además, he creado **10 ejercicios gemelos** para que puedas practicar. ¡Espero que este material te sea de gran utilidad!

Autoría:

Prof. **Fulano de tal**
Matemático y Tutor Personalizado

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS ORIGINALES

Ejercicio 01

Una biblioteca recibió una donación de libros que pueden organizarse exactamente en estantes de 6 libros o en estantes de 14 libros, sin que sobre ninguno. Si la cantidad total de libros recibidos es mayor que 250, ¿cuál es la menor cantidad de libros que pudo haber recibido la biblioteca?

Resolución:

1. La cantidad de libros (N) es múltiplo común de 6 y 14.
2. $N = \text{MCM}(6, 14) \cdot k$.
3. $\text{MCM}(6, 14) = \text{MCM}(2 \cdot 3, 2 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.
4. $N = 42k$.
5. Condición: $N > 250 \implies 42k > 250$.
6. $k > \frac{250}{42} \approx 5.95$. El menor valor entero para k es $k = 6$.
7. Menor cantidad de libros: $N = 42(6) = \mathbf{252}$.

Ejercicio 02

Un agricultor desea empacar mazorcas en bolsas. Nota que puede organizar exactamente las mazorcas en bolsas de 15 o en bolsas de 20, sin que sobre ninguna. Si la cantidad total de mazorcas es menor de 200, ¿cuál es la mayor cantidad de mazorcas que puede haber?

Resolución:

1. La cantidad de mazorcas (N) es múltiplo común de 15 y 20.
2. $N = \text{MCM}(15, 20) \cdot k$.
3. $\text{MCM}(15, 20) = \text{MCM}(3 \cdot 5, 2^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
4. $N = 60k$.
5. Condición: $N < 200 \implies 60k < 200 \implies k < \frac{200}{60} \approx 3.33$.
6. Mayor valor entero para k es $k = 3$.
7. Mayor cantidad de mazorcas: $N = 60(3) = \mathbf{180}$.

Ejercicio 03

Un analista de tecnología codifica sus celulares con números de tres cifras. Por control interno, los códigos deben terminar en 7 y, además, deben ser divisibles entre 13. ¿Cuántos códigos distintos cumplen con estas dos condiciones?

Resolución:

1. El código es un número de 3 cifras (N) que termina en 7: $N = \overline{ab7}$.
2. Condición 1: $100 \leq N \leq 997$.
3. Condición 2: $N = 1\dot{3}$. Entonces $N = 13k$.
4. $100 \leq 13k \leq 997 \implies \frac{100}{13} \leq k \leq \frac{997}{13} \implies 7.69 \leq k \leq 76.61$.
5. $k \in \{8, 9, \dots, 76\}$.
6. Además, N debe terminar en 7, es decir, $13k$ debe terminar en 7. Analizando la última cifra de $13k$:
 - $13 \times k \rightarrow \dots 7$. El factor k debe terminar en ****9**** ($\dots 3 \times \dots 9 = \dots 7$).
7. Buscamos valores de k que terminan en 9 dentro del rango $[8, 76]$.
8. $k \in \{9, 19, 29, 39, 49, 59, 69\}$. (7 valores).
9. Hay **7** códigos distintos.

Ejercicio 04

Durante una actividad en el colegio, los alumnos colocan stickers en sus cuadernos como parte de un concurso. Solo participan aquellos cuadernos que tienen una cantidad de stickers de tres cifras, que termina en 8 y además es divisible por 23. ¿Cuántos cuadernos cumplen con ambas condiciones?

Resolución:

1. Cantidad de stickers (N) de 3 cifras, $N = \overline{ab8}$.
2. Condición 1: $100 \leq N \leq 998$.
3. Condición 2: $N = 2\dot{3}$. Entonces $N = 23k$.
4. $100 \leq 23k \leq 998 \implies \frac{100}{23} \leq k \leq \frac{998}{23} \implies 4.34 \leq k \leq 43.39$.
5. $k \in \{5, 6, \dots, 43\}$.
6. Además, N debe terminar en 8, es decir, $23k$ debe terminar en 8. Analizando la última cifra de $23k$:
 - $23 \times k \rightarrow \dots 8$. El factor k debe terminar en ****6**** ($\dots 3 \times \dots 6 = \dots 8$).
7. Buscamos valores de k que terminan en 6 dentro del rango $[5, 43]$.
8. $k \in \{6, 16, 26, 36\}$. (4 valores).
9. Hay **4** cuadernos que cumplen.

Ejercicio 05

En un torneo de juegos de mesa, cada jugador recibe un número de puntos de dos cifras. Se sabe que, si a la cantidad de puntos de un jugador se le restan 3, el resultado es un número divisible por 8. ¿Cuántos jugadores tienen una cantidad de puntos que cumple esta condición?

Resolución:

1. Cantidad de puntos (P) de dos cifras: $10 \leq P \leq 99$.
2. Condición: $P - 3 = \dot{8} \implies P = \dot{8} + 3$.
3. Reemplazamos en la condición de rango: $10 \leq \dot{8} + 3 \leq 99 \implies 7 \leq \dot{8} \leq 96$.
4. Los múltiplos de 8 en este rango son: $8k$, donde $k \in \{1, 2, \dots, 12\}$.
5. Cantidad de valores de $\dot{8}$ es 12.
6. El número de puntos P toma 12 valores.
7. Hay **12** cantidades de puntos.

Ejercicio 06

En una frutería, los precios de algunas cajas de manzanas están expresados en números de dos cifras. Se sabe que, si a uno de esos precios se le restan 7 soles, el resultado es un número divisible por 9. ¿Cuántos precios cumplen esta condición?

Resolución:

1. Precio (P) de dos cifras: $10 \leq P \leq 99$.
2. Condición: $P - 7 = \dot{9} \implies P = \dot{9} + 7$.
3. Reemplazamos en la condición de rango: $10 \leq \dot{9} + 7 \leq 99 \implies 3 \leq \dot{9} \leq 92$.
4. Los múltiplos de 9 en este rango son: $9k$, donde $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$.
5. Cantidad de valores de $\dot{9}$ es 10.
6. El precio P toma 10 valores.
7. Hay **10** precios que cumplen.

Ejercicio 07

En un almacén, los paquetes están etiquetados con números de tres cifras. Se sabe que, al contar los paquetes en grupos de 14, sobran 6 paquetes, y al contarlos en grupos de 9, también sobran 6 paquetes. ¿Cuántos paquetes de tres cifras cumplen con estas condiciones?

Resolución:

1. Número de paquetes (N) de 3 cifras: $100 \leq N \leq 999$.
2. Condiciones: $N = 14 + 6$ y $N = 9 + 6$.
3. Por el teorema de los múltiplos comunes: $N - 6 = \text{MCM}(14, 9) \cdot k$.
4. $\text{MCM}(14, 9) = 126$.
5. $N = 126k + 6$.
6. Reemplazamos en el rango: $100 \leq 126k + 6 \leq 999 \implies 94 \leq 126k \leq 993$.
7. $\frac{94}{126} \leq k \leq \frac{993}{126} \implies 0.74 \leq k \leq 7.88$.
8. $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
9. Hay **7** cantidades de paquetes.

Ejercicio 08

Un comerciante ha comprado manzanas por cajas y al contar las manzanas observa que le faltan 7 para que lo contado sea divisible por 12, lo mismo sucede si los cuenta de 8 en 8. Halla cuántas manzanas ha comprado, si este número está comprendido entre 283 y 327.

Resolución:

1. Cantidad de manzanas (N).
2. Condiciones: $N + 7 = 12\dot{}$ y $N + 7 = 8\dot{}$.
3. $N + 7 = \text{MCM}(12, 8) \cdot k$.
4. $\text{MCM}(12, 8) = 24$.
5. $N + 7 = 24k \implies N = 24k - 7$.
6. Rango: $283 < N < 327$.
7. $283 < 24k - 7 < 327 \implies 290 < 24k < 334$.
8. $\frac{290}{24} < k < \frac{334}{24} \implies 12.08\ldots < k < 13.91\ldots$
9. Único valor entero para k es $k = 13$.
10. Cantidad de manzanas: $N = 24(13) - 7 = 312 - 7 = \mathbf{305}$.

Ejercicio 09

Un comerciante ha comprado mandarinas por cajas y al contar las mandarinas observa que le faltan 11 para que lo contado sea divisible por 15, lo mismo sucede si los cuenta de 24 en 24. Halla cuántas mandarinas ha comprado, si este número está comprendido entre 720 y 900.

Resolución:

1. Cantidad de mandarinas (N).
2. Condiciones: $N + 11 = 15\dot{}$ y $N + 11 = 24\dot{}$.
3. $N + 11 = \text{MCM}(15, 24) \cdot k$.
4. $\text{MCM}(15, 24) = 120$.
5. $N + 11 = 120k \implies N = 120k - 11$.
6. Rango: $720 < N < 900$.
7. $720 < 120k - 11 < 900 \implies 731 < 120k < 911$.
8. $\frac{731}{120} < k < \frac{911}{120} \implies 6.09\ldots < k < 7.59\ldots$
9. Único valor entero para k es $k = 7$.
10. Cantidad de mandarinas: $N = 120(7) - 11 = 840 - 11 = \mathbf{829}$.

Ejercicio 10

En las olimpiadas estudiantiles de un colegio, se observa que los $\frac{5}{8}$ de los alumnos llevan sombrero, $\frac{5}{9}$ fueron con polo y los $\frac{7}{12}$ decidieron apoyar al equipo rojo. ¿Cuántos estudiantes no llevan sombrero, si el total de estudiantes se encuentra comprendido entre 400 y 500?

Resolución:

1. El número total de alumnos (T) debe ser divisible por 8, 9 y 12.
2. $T = \text{MCM}(8, 9, 12) \cdot k$.
3. $\text{MCM}(8, 9, 12) = 72$.
4. $T = 72k$.
5. Rango: $400 < T < 500 \implies 400 < 72k < 500$.
6. $5.55 \dots < k < 6.94 \dots$
7. Único valor entero para k es $k = 6$.
8. Total de estudiantes: $T = 72(6) = 432$.
9. Pregunta: Alumnos **no** llevan sombrero. Fracción: $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.
10. Alumnos sin sombrero: $\frac{3}{8} \times 432 = 3 \times 54 = \mathbf{162}$.

EJERCICIOS GEMELOS PARA PRÁCTICA

Ejercicio G-01

Una distribuidora de agua embotellada puede organizar su producción en cajas de **8** bidones o en cajas de **18** bidones, sin que sobre ninguno. Si la cantidad total de bidones producidos es mayor que **400**, ¿cuál es la menor cantidad de bidones que pudo haber producido?

- A) 432
- B) 468
- C) 504
- D) 408
- E) 472

Ejercicio G-02

Un panadero hornea bollos que puede empacar exactamente en bolsas de **12** unidades o en bolsas de **16** unidades, sin que sobre ninguno. Si la cantidad total de bollos horneados es menor de **300**, ¿cuál es la mayor cantidad de bollos que puede haber?

- A) 240
- B) 288
- C) 192
- D) 256
- E) 296

Ejercicio G-03

En una tienda de electrónicos, los productos están marcados con códigos de **tres cifras**. Los códigos deben **terminar en 5** y, además, deben ser **divisibles entre 17** para ser válidos. ¿Cuántos códigos distintos cumplen con estas dos condiciones?

- A) 6
- B) 5
- C) 7
- D) 8
- E) 4

Ejercicio G-04

En un curso de diseño gráfico, solo se aceptan proyectos con una cantidad de elementos de **tres cifras**, que **termina en 3** y además es **divisible por 19**. ¿Cuántos proyectos cumplen con ambas condiciones?

- A) 5
- B) 4
- C) 3
- D) 6
- E) 7

Ejercicio G-05

La cantidad de minutos trabajados por un operario es un número de **dos cifras**. Se sabe que, si a esa cantidad se le **restan 5** minutos, el resultado es un **número divisible por 7**. ¿Cuántas cantidades de minutos cumplen esta condición?

- A) 14
- B) 12
- C) 13
- D) 10
- E) 11

Ejercicio G-06

En una tienda de ropa, los descuentos aplicados son números porcentuales de **dos cifras**. Se sabe que, si a uno de esos porcentajes se le **restan 9** unidades, el resultado es un **número divisible por 6**. ¿Cuántos porcentajes cumplen esta condición?

- A) 13
- B) 14
- C) 15
- D) 16
- E) 17

Ejercicio G-07

El número de cuenta de unos clientes es un número de **tres cifras**. Se sabe que, al dividirlos entre **11**, **sobran 4**, y al dividirlos entre **15**, **también sobran 4**. ¿Cuántos números de cuenta de tres cifras cumplen con estas condiciones?

- A) 6
- B) 5
- C) 4
- D) 7
- E) 8

Ejercicio G-08

Un transportista lleva sacos de arroz y al contarlos observa que le **faltan 5** para que el total sea **divisible por 9**, lo mismo sucede si los cuenta de **15 en 15**. Halla cuántos sacos lleva, si este número está **comprendido entre 400 y 480**.

- A) 445
- B) 430
- C) 450
- D) 455
- E) 425

Ejercicio G-09

La cantidad de asistentes a un concierto es tal que si se agrupan de **16 en 16** o de **20 en 20**, siempre **faltan 3** personas para completar un grupo exacto. Halla el número de asistentes, si este número está **comprendido entre 800 y 900**.

- A) 877
- B) 873
- C) 880
- D) 803
- E) 870

Ejercicio G-10

En una encuesta a estudiantes, se observa que los $\frac{3}{5}$ practican natación, los $\frac{5}{12}$ practican ciclismo y los $\frac{2}{3}$ practican fútbol. ¿Cuántos estudiantes **no** practican natación, si el total de estudiantes se encuentra **comprendido entre 350 y 450**?

- A) 170
- B) 160
- C) 260
- D) 420
- E) 380

CLAVE DE RESPUESTAS (Ejercicios Gemelos)

Ejercicio	Clave
G-01	A
G-02	B
G-03	B
G-04	B
G-05	A
G-06	C
G-07	A
G-08	D
G-09	B
G-10	B